$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_o)}{f^{-1}(y) - x_o} = \lim_{y \to y_o} \frac{y - y_o}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}$$

Cette limite etant supposée non nulle, d'apres le theoreme de l'inverse d'une limite,on a (en fait c'est le theoreme des compositions de fonction avec la fonction inverse, sur un point non nul donc ou la fonction onverse est definie)

$$\lim_{y \to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o)}{y - y_o} = \frac{1}{f'(x_o)}, f'(x_o) \neq 0$$

Exemple :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{(\tan y)'}$$

$\tan y = x$

$y = \arctan x$

d) Graphe

Soit $f \in C_m(I)$

Graphe de f $:= G_f = \{(x, f(x); x \in I\}$

Graphe de f^{-1} $:= G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)); y \in f(I)\} = \{(f(x), x); x \in I\}$

$G_{f^{-1}}$ est donc le symetrique de G_f par rapport à la 1ere bissectrice

Dessin

3) Exemple

a) Fonction exponentielle et logarithme neperien.

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ exp est continue et strictmenent monotone sur $\mathbb{R}$

$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

Elle admet une fonction reciproque qui est $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R}, e^x = y) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}_+^*, x = \ln y)$

dessin

b) Fonction tangente et arctangente

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, tan est continue et strictement monotone sur cet intervalle.